

# 力学系によるアプローチ：振動現象を具体例として

郡 宏

## 1. 力学系とは？

物体の位置や状態の時間変化，つまりダイナミクスを理解したいときに使用する数学の道具は微分方程式やマップ (漸化式) などの時間発展方程式である。その代表例はニュートン方程式

$$m\ddot{r} = F \quad (1)$$

であろう。ここで  $r$  は物体の座標， $m$  は質量， $F$  は物体にかかる力である。ニュートン方程式を基礎とした物体の運動を取り扱う学問を力学 (mechanics) と呼ぶ。

しかしながら，我々が記述し理解したいと思う「移ろいゆくもの」は，ニュートン方程式にしたがうような物体とは限らない。たとえば，動植物の個体数 (生態系)，天気，化学反応，さらには，人間関係や脳など，様々な対象がありえる。このように時間発展する対象を一般に力学系 (dynamical systems) と呼ぶ。どのような対象であれ，その時間発展は原理的には微分方程式で記述できる。力学系の慣習では，微分方程式を次のように 1 階の連立微分方程式系で記述する。

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2)$$

ここで  $x$  は状態変数，関数  $f$  は状態変数と時間の関数であり，空間微分などの演算子が含まれる場合もある。ニュートン方程式 (1) のような 2 階の微分方程式も  $\dot{r} = v$  と置くことによって新た

な変数  $v$  を導入すれば， $\dot{v} = F$  と書けるので， $x = (r, v)^T$  とすれば，式 (2) に含まれる。より多階の微分方程式も同様である。力学系という日本語を聞くと力学の一種に感じるかもしれないが，逆に力学を含む枠組みである。

力学系は数学・物理の 1 分野として発展しており，そこでは様々な数学的手法が培われている。本解説では力学系の重要概念や現象理解に役立つ強力な手法を，いくつかの素材を具体的に取り扱いながら解説していこう。

## 2. アトラクタ

まず，アトラクタから始めよう。アトラクタとは，適当な初期条件から始めたときに，時間とともに接近していく状態のことである。例えば線形減衰振動

$$\dot{r} = v, \quad m\dot{v} = -kr - \gamma v \quad (3)$$

では減衰率  $\gamma$  が正の時， $r = v = 0$  で表される定常状態 (stationary state) がアトラクタである (図 1)。アトラクタは必ずしも定常状態ではなく，周期的運動状態や非周期的な運動状態 (カオス) などもありえる。

アトラクタは，エネルギー保存則の成り立つハミルトン系では存在しない。例として 2 次元力学系を考えよう (図 1 参照)。ある時刻  $t$  において相空間上にある閉じた集合を考え，この集合内の点

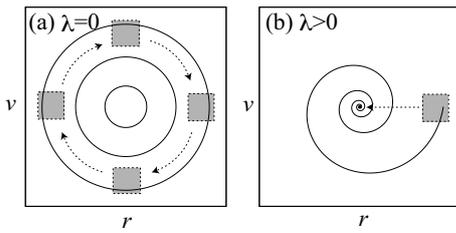


図 1 (a) 調和振動子 ( $\lambda = 0$ ) と (b) 減衰振動子 ( $\lambda > 0$ ) の軌道．調和振動子については 3 つの異なる初期条件に対する軌道である．グレーの領域は状態の集合で、どのように時間発展するかが描かれている．

が時間とともにどのように発展していくかを考える．この集合は時間とともに変形する．アトラクタがある場合は、この集合はより低次元の集合へと接近し、定常状態の場合は 0 次元、周期軌道の場合は 1 次元の軌道に収束する．つまり、集合の面積は最終的に 0 となる．一方、ハミルトン系ではリウヴィルの定理によって、その集合の面積は一定に保たれることが示される．したがって、アトラクタはハミルトン系には存在しない．

我々の研究対象は、そのほとんどが摩擦やエネルギー供給を受ける散逸系（あるいは開放系ともよばれる）であり、そこにはアトラクタが存在する．アトラクタの特徴は安定性である．つまり、系になんらかの乱れがあっても、乱れが小さい限りは、運動はアトラクタの近傍に留まる．したがって系のアトラクタを見つけ、アトラクタの性質やその近傍の性質がわかれば、系のダイナミクスについてかなりの理解が得られる．

### 3. リミットサイクル

ニュートン力学系で現れる振動現象の代表例は、振り子などの自由運動であり、これはハミルトン系である．しかしこのような振動と生物などで見られる振動現象の間には大きな違いがある．上述した安定性である．

次のような思考実験をしてみよう．摩擦のない振り子を出してみる．すると振幅が変化し、違う周期軌道に遷移する．どんなに軽く突いても振幅

は変化してしまい、もとの周期軌道には戻らない．この意味で振り子の持つ周期軌道はアトラクタではない．一方、安静にした状態で、胸を外からぼんぼんとたたいてみよう．たたいた直後は心臓の振動が少しは乱れているかもしれないが、十分時間がたてば、拍動の振幅が大きく、あるいは小さくなったような状態には遷移していないだろう．この意味で、心臓の拍動は安定である．同様の性質は機械式のメトロノームや振り子時計にもある．手元にこれらがある場合は、その周期軌道が初期状態によらないこと、また外から乱れを与えても、再びまた元の周期軌道に戻ることを観察してみよう．つまり、これらの振動状態はアトラクタである．

散逸系に現れる安定な振動現象は、リミットサイクル振動と呼ばれる．2 つ例を挙げよう．

#### 3.1 メトロノーム

まずは、メトロノームの安定性の起源について考察しよう．メトロノームの針の運動は、摩擦によって減衰する．しかし針は中央付近を通過するときに、運動している方向に弾かれる機構がある．この力はゼンマイに蓄えられたエネルギーによって与えられている．ここで振動の 1 周期でのエネルギーの収支を考えよう．摩擦によって失うエネルギーは、振動の振幅  $A$  と共に増大する．一方、ゼンマイから得るエネルギーは、振幅によらずだいたい一定であると考えよう．これをグラフにしたのが、図 2 である．振幅が大きいと失うエネルギーの方が大きい．だから振幅は小さくなっていく．一方、振幅が小さいと得るエネルギーの方が大きい．だから振幅は大きくなる．その結果、エネルギー収支がバランスする交点  $A = A^*$  に、メトロノームは自発的にたどり着くのである．かくしてメトロノームは安定した振幅で振動するのである．

次に、メトロノームの運動方程式を構築する．上述の考察が正しければ、減衰振動子が中心付近を通過するときに、その運動方向に力が加わるようにするだけでいいはずである．減衰項は単純さを優先し、速度に比例する粘性抵抗を採用しよう．そしてこれに力  $p(r, \dot{r})$  を加えた次の方程式を考える．

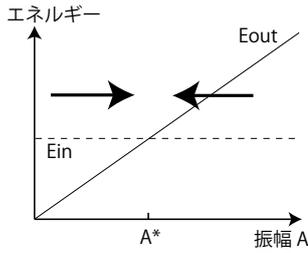


図 2 一周期のエネルギー収支の振幅依存性．交点  $A^*$  に自発的に収束し，そこでは得るエネルギーと失うエネルギーがバランスする．この図では振幅依存性を直線としているが，交点があればどのような依存性でもいい．

$$\dot{r} = v, \quad m\dot{v} = -kr - \gamma v + p(r, v). \quad (4)$$

ここで，関数  $p$  がメトロノームの状態変数  $r$  と  $v$  のみ関数であり，時間を陽に含まないものとした点に注意したい．メトロノームは，針の状態によって力が決まる，いわゆる自己駆動系であり，時間的にスケジュールされた力が加わっているわけではない<sup>\*1)</sup>．

関数  $p$  は次のようなものが適切であろう．

$$p(r, v) = \begin{cases} p_+(r) & \text{for } v > 0, \\ p_-(r) & \text{for } v < 0. \end{cases} \quad (5)$$

ここで  $p_+(r)$  は， $r > 0$  のある限られた領域で正の値を持つ関数であり， $p_-(r)$  はそれを反転させたもの，つまり， $p_-(r) = -p_+(-r)$  である．ここでは図 3(a) のような関数を仮定する．式 (4) を数値積分すると，確かにリミットサイクル軌道がアトラクタとなっていることが確かめられる (図 3)．

### 3.2 化学反応系

化学反応でも振動性の反応が現れることが知られている．その代表例は Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応なのだが，これは複雑なので，ここではプリゴジンらによって考案されたブラッセレータ (Brusselator) と呼ばれる仮想的な化学反応系を紹介する<sup>1)</sup>．ブラッセレータは次の反応式で表される．

\*1) 式 (2) で，右辺に陽に時間が現れない系を自律系と呼び，時間周期的な外力など時間が陽に現れる系を非自律系と呼ぶ．自己駆動系とは自律系で記述することに他ならない．

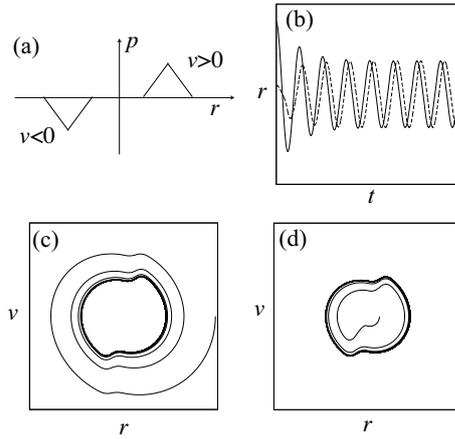
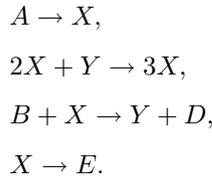


図 3 メトロノームの数理モデルに関して．(a) 関数  $p(r, v)$ ．(b) 大小 2 つの異なる初期条件からの時系列．(c)(d) 大小 2 つの異なる初期条件に対する軌道．周期解 (リミットサイクル軌道) に接近していく様子が見える．



反応式を見てわかる通り，分子  $A$  と分子  $B$  は時間と共に減少していく．しかし，その量があまり変化しない程度の時間領域を考えるか，あるいは量が変化しないように外部から供給し続けている状況を考えよう．各分子の濃度を対応する小文字で表し， $a$  と  $b$  を定数とし， $x$  と  $y$  の時間変化に着目する．質量作用の法則にしたがって微分方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a + x^2 y - bx - x, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y \end{aligned} \quad (6)$$

を得る．ここで，反応係数 (つまり各項の係数) は全て 1 と仮定している．

まず定常状態を調べよう．式 (6) で  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  と置くと，定常解  $x = a$ ， $y = b/a$  を得る．この状態は式 (6) の解として常に存在しているが，安定解，つまりアトラクタとなっているとは限らない．そこで線形安定性を調べよう．まず，微小量  $\Delta x, \Delta y$  を用いて，定常状態から少しずれた状態

を  $x = a + \Delta x, y = b/a + \Delta y$  と表現する．次に，この  $x, y$  を式 (6) に代入し  $\Delta x, \Delta y$  に対して線形化すると

$$\dot{\xi} = L\xi, \quad L = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

を得る．ここで， $\xi = (\Delta x, \Delta y)^\top$ ， $L$  はヤコビ行列である．

ヤコビ行列  $L$  の固有値の実部が全て負のとき，どのような摂動も時間的に指数関数的に減衰するので定常解はアトラクタであり，1 つでも正であれば不安定解となる．固有値を  $\lambda$  として  $L$  に対する固有方程式を解くと

$$\lambda = \frac{-(a^2 - b + 1) \pm \sqrt{(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2}}{2} \quad (8)$$

を得る．これより直ちに， $b = b_{cr} \equiv 1 + a^2$  を境に安定性が切り替わることがわかる． $b < b_{cr}$  のときは，2 つの固有値の実部は負であり，安定解であることがわかる．一方， $b > b_{cr}$  では実部が正で不安定解である．

さて，定常解が不安定化するとどうなるのであろうか？ まずは数値的に検証しよう．式 (6) で  $a = 1.0$  と固定し，様々な値の  $b$  に対して，適当な初期条件から数値シミュレーションを行った．十分時間が経過してから， $x$  の最大値と最小値を求めたのが図 4 である． $b < b_{cr} = 2.0$  に対しては定常状態だが， $b > b_{cr}$  では最大値と最小値が異なっている．軌道を観察すると，これがリミットサイクル振動であることがわかる．このリミットサイクルの出現を数学的にどのように説明するかについて，次節で解説する．

#### 4. 分岐と中心多様体縮約理論

ブラッセレータは力学系の重要な概念である分岐 (bifurcation) を説明するのに格好の題材である． $b = b_{cr}$  でアトラクタの種類が変化したが，このように解の安定性が切り替わったり，あるいは新しい解が現れたりするなどして，状態空間に定

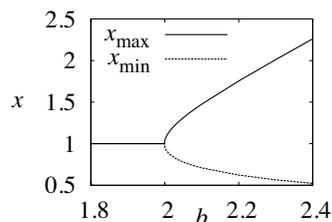


図 4 ブラッセレータの数値シミュレーション．

性的な変化が起こることを分岐と呼び，分岐が起こるパラメタ値のことを分岐点と呼ぶ．分岐には様々な種類があるのだが，パラメタの変化と共に 1 組の固有値が虚軸を横切る今回のケースは Hopf 分岐と呼ばれる．Hopf 分岐は定常状態から振動現象が生まれる典型的なシナリオである．

Hopf 分岐で定常状態が不安定化するとき，その固有値は複素数なので振動しながら定常状態から離れていく．しかしその振幅は無制限に大きくなれるわけではなく，系の非線形性によってやがて押さえ込まれ，線形項に起因する不安定性と非線形項に起因する安定性の効果がバランスするところでとまる．ここにリミットサイクル軌道が現れる．

このことを数学的に説明する有用な道具が中心多様体理論 (center manifold theory) である．この理論は，分岐近傍にある力学系の挙動が，分岐に伴って不安定化する少数自由度のモードに実効的に支配されているという事実に基づいて，力学系を摂動展開と座標変換によって系統的に標準型 (normal form) に帰着させる (理論の詳細は，例えば文献<sup>2)</sup> を参照)．Hopf 分岐の場合は次の標準型が得られる．

$$\dot{w} = \alpha w - \beta w|w|^2 + O(w^5). \quad (9)$$

ここで  $w$  は複素振幅と呼ばれる複素数の変数である<sup>\*2)</sup>． $\alpha, \beta$  は複素パラメタで，その表式は元の力学系が与えられれば求められる． $w$  は元の力学系の定常状態付近に現れる軌道を適当に変数変換した

\*2) 式 (9) の  $O(w^5)$  を無視したものは Stuart-Landau 振動子と呼ばれ，振動現象の研究に頻りに用いられる．

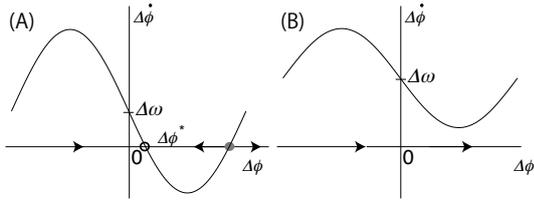


図5 位相差の運動方程式 (13) のベクトル場 .

ものである .  $\alpha$  の実部は分岐パラメタ  $\mu \equiv b - b_{cr}$  に比例しており  $\mu = 0$  を境に , 定常解  $w = 0$  が不安定化する . 3 次の項の係数  $\beta$  の実部が正の場合は , この項によって不安定性が抑えられ , 振幅が  $O(\sqrt{\mu})$  のリミットサイクル解が現れる . このことは式 (9) で  $w = re^{i\phi}$  と極座標表示すると簡単に確かめられる . 一方 ,  $\beta$  の実部が負の場合は , 3 次の項では不安定性が抑えられず  $O(w^5)$  の項を考えなければならない . なお , ブラッセレータの場合は  $\beta$  の実部が常に正であることが示せ ,  $\mu > 0$  のときにリミットサイクルが現れることが証明できる<sup>3)</sup> . 図4を見ると , 分岐点近くにおいて振幅が急激に増加しているが , これは標準型から説明されているとおり , 振幅が  $O(\sqrt{\mu})$  の立ち上がりを持つためである .

標準型は分岐のタイプによって決まるもので , 元の力学系の詳細によらない . 詳細に依存するのは , 標準型のパラメタのみである . 今回の例は2次元のモデルであるブラッセレータを扱ったが , これより高次元のモデルでも同様に2次元の式 (9) に帰着する . これは , Hopf 分岐では , 不安定化するモードが2つだからである . この意味で中心多様体理論は強力な縮約理論である . ほとんどの非線形方程式は , そのままではどうも解析的に取り扱えないのだが , 分岐点近傍に限れば標準型に帰着させられ , アトラクタとその近傍の性質を解析的に取り扱える .

## 5. 位相縮約

振動現象に対する縮約理論には , 重要なものがもう1つ存在する . 位相縮約である . この理論に

よって導かれる方程式を位相方程式 (あるいは位相モデル) と呼ぶ . 位相縮約は , 振動子が弱い外力を受けているときの動的応答や , 複数の振動子が弱い相互作用を持つときに現れる集団挙動の解析に威力を発揮する . ここではリミットサイクル振動子が周期外力を受けているときにおこる同期現象を例に位相縮約の有用性を解説する .

リミットサイクル振動子が外力を受けている状況を次のように記述する .

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon p(t). \quad (10)$$

ここで  $\epsilon$  は外力の強さ ,  $p(t)$  は一般的な時間の関数で , 後で周期外力を仮定する .  $\epsilon$  が小さいときは ,  $\epsilon$  の最低次で次のような位相方程式に縮約される<sup>3,4)</sup> .

$$\dot{\phi} = \omega + \epsilon Z(\phi) \cdot p(t). \quad (11)$$

ここで  $\phi$  は  $0 \leq \phi < 2\pi$  で定義される振動子の位相 ,  $\omega$  は固有振動数 ,  $Z(\phi)$  は位相感受関数 (phase sensitivity) と呼ばれる  $2\pi$  周期関数である .  $\omega$  はリミットサイクル軌道の周期  $T$  から  $\omega = 2\pi/T$  と求まる . 一方 ,  $Z(\phi)$  は外力に対する位相の線形応答率であり , リミットサイクル軌道とその近傍の性質によって決まる関数である . 式 (9) で記述される Stuart-Landau 振動子に対しては  $Z(\phi)$  が解析的に求まる . 式 (10) と形式を合わせるために  $x = (\text{Re } w, \text{Im } w)^T$  と置く . Stuart-Landau 振動子の位相感受関数は  $Z(\phi) = c_1(\cos(\phi + \theta_1), \sin(\phi + \theta_1))^T$  と計算される<sup>3,4)</sup> . ここで  $c_1, \theta_1$  は定数で ,  $\alpha$  と  $\beta$  の関数として求まる . 外力として  $c_2, \theta_2$  をパラメタとする周期外力  $p(t) = c_2(\cos(\Omega t + \theta_2), \sin(\Omega t + \theta_2))^T$  を考えよう . すると

$$Z(\phi) \cdot p(t) = -c \sin(\Omega t - \phi + \theta) \quad (12)$$

を得る . ここで  $c$  と  $\theta$  は定数で ,  $c_1, c_2, \theta_1, \theta_2$  の関数として求まる .

式 (11) , (12) で表される系の挙動を調べよう .  $\Delta\phi = \Omega t - \phi$  と置くと

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega + \kappa \sin(\Delta\phi + \theta) \quad (13)$$

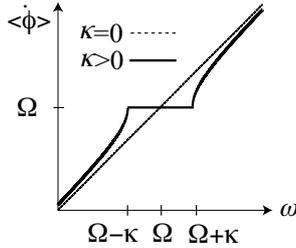


図 6 周期外力を受けたときの平均振動数．

を得る．ここで  $\Delta\omega = \Omega - \omega$ ,  $\kappa = \epsilon C$  である．一般性を失わず,  $\kappa > 0$  と仮定する．式 (13) は 1 次元力学系であり, その解と安定性は図 5 のように,  $\Delta\dot{\phi}$  を  $\Delta\phi$  の関数として表示するとわかる． $\Delta\phi$  軸上の矢印は  $\Delta\dot{\phi}$  の符号によって決まる  $\Delta\phi$  の発展方向であり, ベクトル場と呼ばれる． $\Delta\dot{\phi} = 0$  の解の有無により, 定性的に異なる 2 つの状況がある．(A) の場合は安定解と不安定解が 1 組存在し, 一般の初期状態に対して安定解  $\Delta\phi^*$  に収束する．このとき, 振動子は周期外力の振動数と同一の振動数を持つ．このような現象を振動数同期と呼ぶ．一方 (B) では, そのような状態が存在せず, 位相差  $\Delta\phi$  は時間と共に大きくなり続け, 振動数同期は起こらない．

振動数同期の条件は, 式 (13) の右边が 0 となる解が存在することである． $|\sin(\cdot)| \leq 1$  であることに注意すれば,  $\kappa$  の臨界値

$$\kappa_{cr} = |\Delta\omega| \quad (14)$$

が求まる． $\kappa > \kappa_{cr}$  のとき振動数同期が起こる． $\kappa > \kappa_{cr}$  で存在している安定解と不安定解 (図 5(A)) は,  $\kappa = \kappa_{cr}$  で対消滅し, これによって状態空間に定性的変化が現れる．この分岐はサドル・ノード分岐と呼ばれ, 様々な対象に対して頻出する重要な分岐である<sup>5)</sup>．

振動数同期していないときの振動子の平均振動数  $\langle \dot{\phi} \rangle$  は次のように求めることができる． $\dot{\phi} = \Omega t - \Delta\phi$  より,  $\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega - \langle \Delta\dot{\phi} \rangle$  である．同期していないときには  $\Delta\phi$  が周期運動していることに注意する．その周期を  $\tau$  とすると,  $\omega < \Omega - \kappa$  のときは  $\langle \Delta\dot{\phi} \rangle = 2\pi/\tau$ ,  $\omega > \Omega + \kappa$  のときは

$\langle \Delta\dot{\phi} \rangle = -2\pi/\tau$  である．式 (13) を 1 周期で積分すると

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\Delta\phi}{\Delta\omega + \kappa \sin(\Delta\phi + \theta)} \quad (15)$$

となり, 図 6 の結果が得られる．

一般のリミットサイクル振動子に対しては, 式 (11) に対して, さらに平均化と呼ばれる近似<sup>4)</sup> を行うことにより, 式 (13) の右边が別の周期関数に置き換わった位相方程式を得る．すると後は同様の議論ができ, 同期現象が同様な条件下で起こるが示せる．式 (10) の一般的な記述をそのまま扱っているのは, 同期の条件を示すのは困難である．

## 6. おわりに

力学系による現象理解の方法, つまり, 対象のモデル化, 分岐解析, 数値解析, 運動方程式の縮約 (簡略化) と解析, について力学系の基礎概念の紹介を交えながら解説した．

最後に, より詳しく勉強されたい方のためにいくつか文献を紹介する．力学系の入門書としては文献<sup>5)</sup> をおすすめしたい．分岐やその標準型についてもわかりやすく紹介されている．また, 振動現象に対する縮約理論に関しては文献<sup>4)</sup> にわかりやすく解説されている<sup>\*3)</sup>．

## 参考文献

- 1) 三池秀敏, 森義仁, 山口智彦. 非平衡系の科学 III. 講談社サイエンティフィック, 1997.
- 2) J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- 3) Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
- 4) 蔵本由紀, 河村洋史. 同期現象の数理. 培風館, 2010.
- 5) S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos*. Westview, 1994.

(こおり・ひろし, お茶の水女子大学)

\*3) 河村洋史氏にこの原稿のチェックをしていただいた．この場を借りて感謝したい．