

リズムのゆらぎと応答のミクロ・マクロリンク

郡 宏

1. はじめに

複数のメトロノームを吊橋のような台の上に載せると、台を介した相互作用によってお互いに影響を与え合い、やがてメトロノームの振動のタイミングがピタリと合う現象が観察できる。これは同期現象と呼ばれる。例えば動画¹⁾の場合は、少し異なるピッチを持たせた4つのメトロノームが台の上では周期を完全に一致させ、さらに振動のタイミング、つまり位相もほぼ一致させる。このような同期現象は化学反応系や生命系などの散逸系に現れる振動現象において広く見られる。タンパク質レベルや細胞レベルといったミクロなスケールで起こる振動が集団で同期することによって、心拍や約24時間周期の概日リズムなどといった我々が観察することができるマクロスケールの振動が形成される。

強いゆらぎを伴うミクロな振動子が集団で同期すると、振動子の実効的なゆらぎが小さくなるのが、心拍や体内時計の実験で観察されている。心筋細胞は、分離培養したときでも自発的に周期的な収縮を起こす。その振動周期を多数回観測すると、典型的な細胞では、約1秒の平均周期に対して、0.3秒程度の標準偏差（振動ゆらぎ）を持つ。心筋細胞同士が接触すると、細胞同士はギャップ結合と呼ばれる「穴」を介して電氣的に相互作用し収縮のタイミングが同期する。このようにして同期した細胞の個数が増えるほど振動ゆらぎが小さくなり、周期列の標準偏差がおおよそ $\frac{1}{\sqrt{N}}$ に比例して減少することが報告されている²⁾。100細胞程度の集団だと、1細胞のときに比べおおよそ $\frac{1}{10}$ の0.03秒程度の標準偏差となり、我々が安静時に持つ心拍ゆらぎと同程度になる。心筋細胞同士の接触をより精密に制御した場合についての報告もある³⁾。また、同様の

現象が体内時計においても重要であると指摘されている。真っ暗な一定の条件にした実験室で哺乳類などの1日の行動リズムを観察すると、約24時間周期の睡眠覚醒リズムを示すが、その周期列の標準偏差は10分程度と極めて短い。一方、哺乳類の概日リズムを制御する時計細胞（脳の視交叉上核という部位を構成する細胞）を分離培養すると、その周期ゆらぎは2時間程度である⁴⁾。個体レベルの正確なリズムの背後に時計細胞集団の同期によるゆらぎの減衰があると考えられている^{5,6)}。

ここで、次のような一般的な問いかけができる。個々の振動子が固有に持つゆらぎは、振動子集団が同期した時、マクロな振動にどのように継承されるのだろうか？また、この問いは、ゆらぎに限らず外部入力にも一般化できる。つまり、個々の振動子が入力をうける時、マクロな振動はどのように応答するだろうか？このようなミクロ・マクロリンクは、弱いゆらぎや外部入力を仮定し、長時間挙動に限定すると一般的な定式化ができる。本稿では、この話題を扱った研究^{7~9)}について解説を行いたい。

2. 準備：位相方程式による同期の記述と安定性

まず、同期状態の記述と安定性解析の常套手段について解説する。この解析手法は次節以降のミクロ・マクロリンクの定式化で使用する。

メトロノームのような機械系や、Belousov-Zhabotinsky反応と呼ばれる化学反応系における振動現象は、単一の振動子の記述において非線形性を考慮することが不可欠であり、これが数理的解析を困難にする。まして複数の振動子の相互作用系の解析が難しいことは容易に想像できる。しかし、数学的な取扱を可能にする2

つの代表的な近似理論がある．1つは分岐点近傍で解析を行う中心多様体縮約であり，もう1つは振動子間の相互作用が弱いときに妥当である位相縮約である¹⁰⁾．本研究は後者に基づく．位相縮約によって，弱く相互作用する N 個のリミットサイクル振動子集団の従う時間発展方程式は，次の位相方程式に近似される^{10,11)}．

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N f_{ij}(\phi_i - \phi_j) \quad (1)$$

ここで $\phi_i(t)$ と ω_i は，それぞれ，振動子 i ($i = 1, 2, \dots, N$) の位相と固有振動数 (定数) である．また， f_{ij} は 2π 周期関数で，振動子 j から i への影響を表す結合関数である． ω_i は振動子固有の性質によって決まり， f_{ij} は振動子と相互作用の性質によって決まる．式 (1) は， f_{ij} の与え方によって，大域結合，格子の最近接結合，あるいはどのようなネットワークも記述することができる．以降，ネットワークを念頭におき，振動子 i をノード i と呼ぶことにする．位相方程式において， ω_i は定数であり，相互作用が位相差の関数で記述されていることが解析における大きな利点となる．なお，いわゆる蔵本モデルは，式 (1) において， ω_i を適当な分布にしたがう乱数， $f_{ij}(\psi) = -\frac{1}{N} \sin \psi$ として， $N \rightarrow \infty$ の極限を取ったものである¹⁰⁾．

この節では式 (1) の解析を， $N = 2$ の場合で，結合関数を

$$f_{ij}(\psi) = -\kappa \{\sin(\psi + \alpha) - \sin \alpha\} \quad (2)$$

として具体的に行う．ここで $\kappa > 0$ は結合強度で， α は後述する通り，ターゲットパターンと呼ばれる自発的な自己組織化現象を記述するときに不可欠なパラメータである．式 (2) で記述される結合関数は位相差 $\psi = 0$ のとき値 0 を取る．つまり，完全に同期すると相互作用が消える．このような相互作用は，その強度が細胞間の電位差に比例するギャップ結合や，物質の拡散を介して相互作用する化学反応系に典型的な性質である．

まず，同期状態を表す解を求める． $i = 1$ と 2 に対する式 (1) の辺々を引き， $\psi = \phi_1 - \phi_2$ ， $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ と置くと

$$\dot{\psi} = \Delta\omega - 2\kappa \cos \alpha \sin \psi \quad (3)$$

を得る．次の条件

$$\left| \frac{\Delta\omega}{\kappa} \right| \leq 2|\cos \alpha| \quad (4)$$

が満たされるとき，式 (3) において $\dot{\psi} = 0$ の解，すな

わち振動数が完全に一致した解が存在する．この解を与える $\psi = \psi^*$ は

$$\sin \psi^* = \frac{\Delta\omega}{2\kappa \cos \alpha} \quad (5)$$

を満たす．この ψ^* は式 (4) で等号が成立するときを除くと2つの値をとるが，あとで示すとおり一方が安定解を他方が不安定解を表わす．さらに，同期したときの振動数 Ω は $\psi = \psi^*$ を式 (1) に代入すると得られる．このようにして得られた ψ と Ω を用いて，同期状態は

$$\phi_i = \Omega t + \theta_i \equiv \phi_i^*, \quad (6)$$

によって記述することができる．ただし，この例では $\theta_1 = \psi, \theta_2 = 0$ である．このような解は位相ロック解と呼ばれ，振動数が完全に一致した同期状態を表す．一方，式 (4) が満たされないときはこの解は消滅しており，振動数が一致しない状態が得られる¹¹⁾．式 (4) のように， $|\frac{\Delta\omega}{\kappa}|$ が何らかの定数より小さいという条件は弱結合系で一般的に現れる同期の条件である．

次に位相ロック解の線形安定性について考える．変位 x_i を用いて

$$\phi_i = \phi_i^* + x_i \quad (7)$$

とおき，式 (7) を式 (1) に代入して x_i について線形化すると次式を得る．

$$\dot{x}_i = A_{ij}(x_j - x_i). \quad (8)$$

ここで $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$ で， $A_{ij} = -f'_{ij}(\theta_i - \theta_j)$ である．あるいは $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ， $p = -A_{12}, q = -A_{21}$ とおくと以下の形式になる．

$$\dot{\mathbf{x}} = -L\mathbf{x}, \quad (9)$$

$$L = \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}. \quad (10)$$

ここで現れた $-L$ は安定性行列と呼ばれる．解の安定性はこの行列に対する固有値問題によって特徴づけられる．まず L は固有値 $\lambda^{(1)} = 0, \lambda^{(2)} = p+q$ を持つ．対応する右固有ベクトル，すなわち $L\mathbf{u}^{(\ell)} = \lambda^{(\ell)}\mathbf{u}^{(\ell)}$ を満たす列ベクトル $\mathbf{u}^{(\ell)}$ は，それぞれ $\mathbf{u}^{(1)} = (1, 1)$ ， $\mathbf{u}^{(2)} = (-p, q)$ である．また，対応する左固有ベクトル，すなわち $\mathbf{v}^{(\ell)}L = \lambda^{(\ell)}\mathbf{v}^{(\ell)}$ を満たす行ベクトル $\mathbf{v}^{(\ell)}$ は，それぞれ $\mathbf{v}^{(1)} = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$ ， $\mathbf{v}^{(2)} = \left(\frac{1}{p-q}, \frac{1}{q-p}\right)$ である．固有値 0 に対応する固有ベクトルはゼロ固有ベクトルと呼ばれることがある．本稿では $\mathbf{u}^{(1)}$ と $\mathbf{v}^{(1)}$

を、それぞれ、左ゼロ固有ベクトル、右ゼロ固有ベクトルと呼ぶ。また、左右の固有ベクトルは

$$\mathbf{v}^{(\ell')}\mathbf{u}^{(\ell)} = \delta_{\ell'\ell} \quad (11)$$

によって規格化されている。また、異なる固有値に対応する左右の固有ベクトルは直交していることに注意する¹²⁾。なお、本稿では、 (a, b) は列行列 $(a \ b)^\top$ を表し、 $(a \ b)$ は行ベクトルを表すものとする。

次に対角化を行う。 $\mathbf{x}(t)$ を固有ベクトル $\mathbf{u}^{(k)}$ を用いて次のように表わす。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N y^{(k)}(t)\mathbf{u}^{(k)}. \quad (12)$$

ここで $y^{(k)}(t)$ を第 k モード成分と呼ぶ。これが

$$y^{(k)}(t) = \mathbf{v}^{(k)}\mathbf{x}(t) \quad (13)$$

によって与えられることは、式 (12) の両辺を、 $\mathbf{v}^{(\ell)}$ と内積をとり、式 (11) に注意すると確認できる。さらに式 (13) の両辺を時間で微分し、式 (9) を代入することによって、次の対角化された発展方程式を得ることができる：

$$\dot{y}^{(\ell)} = -\lambda^{(\ell)}y^{(\ell)}. \quad (14)$$

ここで式 (14) の発展方程式をモードごとに見てみよう。まず y_1 は $\dot{y}_1 = 0$ に従うので保存量であり、その値は、変位の初期条件 $\mathbf{x}(0)$ が与えられたとき、式 (13)、すなわち $y_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{x}(0)$ によって定まる。この 0 固有値によって特徴づけられるモードは系の時間並進対称性に起因するものである。つまり、自励系 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ において、ある周期解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$ が解であるとき、任意の時間 τ だけシフトした $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t + \tau)$ もまた解となる。今考えている位相ロック解においては時間シフトは位相シフトに解釈し直すことができ、任意の一樣な位相シフト C に対して、 $\phi_i = \phi_i^* + C$ ($i = 1, 2$) もまた解である。右ゼロ固有ベクトル $\mathbf{u}^{(1)}$ はこの一樣な位相シフトに対応している。後述する通り、このモードはマクロな振動の応答を担うため、**集団モード**と呼ぶ。

もう一方のモード成分である $y^{(2)}$ は、 $\lambda^{(2)}$ の実部が正のとき、時間とともに減衰し 0 に漸近する。すると、同期解近傍の一般的な初期条件に対し、系は同期解に収束するので同期解は安定である。この例では $\lambda^{(2)} = p + q > 0$ が安定性の条件である。 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは、式 (5) で与えられる ψ^* のう

ち、 $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \psi^* < \frac{\pi}{2} + \alpha$ を満たす方のものが安定解、他方が不安定解であることが示せる。以降は安定解にのみ着目する。

3. ミクロ・マクロリンク

前節では式 (1) の解析を $N = 2$ の特定の例について行ったが、上述のことはそのまま $N \geq 3$ の場合に対して一般化できる。ただし、位相ロック解が存在し、行列 L が対角化可能であること、またその固有値が

$$0 = \lambda_1 < \text{Re}\lambda_2 \leq \dots \leq \text{Re}\lambda_N \quad (15)$$

を満たすことを仮定する必要がある。ただし、 $\text{Re } z$ は z の実部を表わす。安定な位相ロック解の存在は、固有振動数 ω_i の分布や結合関数 f_{ij} の関数形に依存することに注意が必要である。例えば文献¹³⁾を参照していただきたいが、比較的緩やかな条件である。この節以降は、式 (1) に安定な位相ロック解が存在することを仮定する。

さて本題に入ろう。ミクロな振動子が受ける外部入力やゆらぎは、マクロな振動にどのように継承されるだろうか？これを明らかにするために、式 (1) の個々のノード i に外部摂動 $\xi_i(t)$ を加えた次の系を考える。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_j f_{ij}(\phi_j - \phi_i) + \xi_i. \quad (16)$$

後で $\xi_i(t)$ を白色ガウスノイズとした場合を考えるが、ここでは一般の時間の連続関数としておき、その大きさを $\xi_i = O(\varepsilon)$ であるとする。摂動 $\xi_i(t)$ が小さいとして式 (16) を線形化すると

$$\dot{\mathbf{x}} = -L\mathbf{x} + \mathbf{p} \quad (17)$$

を得る。ここで $\mathbf{p} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ である。さらに、摂動がない場合とまったく同じ計算を行うと

$$\dot{y}^{(\ell)} = -\lambda^{(\ell)}y^{(\ell)} + \mathbf{v}^{(\ell)}\mathbf{p} \quad (18)$$

を得る。

まず集団モード以外 ($2 \leq \ell \leq N$) のダイナミクスに着目する。式 (18) の右辺第 1 項の効果により、これらのモードは 0 の周りに束縛され、その大きさは $|y^{(\ell)}| = O\left(\frac{\varepsilon}{\text{Re}\lambda^{(\ell)}}\right)$ である。一方、集団モードは

$$\dot{y}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N V_i \xi_i(t) \quad (19)$$

に従うので、束縛なく発展することがわかる。ただし、

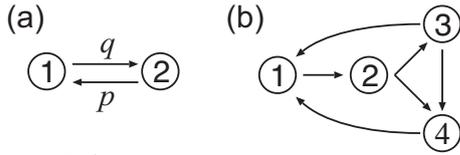


図 1 重要度の例. (a) $A_{12} = p, A_{21} = q$. (b) $A_{13} = A_{14} = A_{21} = A_{32} = A_{42} = A_{43} = 1$. 記述のない A_{ij} は 0 である. それぞれ $(V_1, V_2) = \frac{1}{p+q}(q, p)$, $(V_1, V_2, V_3, V_4) = \frac{1}{10}(2, 4, 3, 1)$ が得られる.

V_i は左ゼロ固有ベクトル $\mathbf{v}^{(1)}$ の第 i 成分である. 式 (19) から一般的な摂動 $\xi_i(t)$ に対しては, 十分な時間が経過すると $|y^{(1)}| \gg |y^{(\ell)}|$ ($2 \leq \ell \leq N$) となることが期待できる. すると, 式 (12) より $\mathbf{x} \approx y^{(1)} \mathbf{u}^{(1)}$, あるいは, $x_i \approx y^{(1)}$ ($1 \leq i \leq N$) となる. 式 (7) で定義したとおり x_i は定常な振動状態からの変位を表すので, 結局すべての振動子の長時間挙動は $y^{(1)}$ のみによって記述されている. これが $\ell = 1$ のモードを集団モードと呼んだ理由である.

式 (19) を見ると, ノード i の受ける外部摂動 ξ_i に重み V_i が付加されており, V_i が大きいほどノード i の集団運動に対する寄与が大きい. また, この量は $\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = 1$, あるいは $\sum_{i=1}^N V_i = 1$ によって規格化されているので, V_i はノード i の集団モードに対する相対的な重要度であるといえる. L が対称行列のときは $\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{N}(1 \dots 1)$ であり, すべてのノードの重要度が等しくなる. 一方, L が非対称行列の場合は幾つかの特殊なケースを除いて重要度は非一様である.

2 つ具体例をあげよう. 図 1(a,b) のネットワークを考える. (a) は重み付きネットワークであり, (b) は重みは 1 か 0 だが複雑な構造を持つネットワークである. (a) のようなネットワークは 2 節で見たとおり, 固有振動数に差がある振動子系で自発的に現れる. (b) は重みが一定のネットワークで $(V_1, V_2, V_3, V_4) = \frac{1}{10}(2, 4, 3, 1)$ が得られ, ノード 2, ついでノード 3 がもっとも影響力を持つことがわかる. ノード 2 と 3 はともに 2 つのノードに直接影響を与えているため, ノード 1 と 4 より重要度が大きいことは納得できる. ノード 2 のほうがさらに重要度が大きいのは重要なノードであるノード 3 に直接影響を与えているという構造が効いていると直感できる. この直感は, 全域木 (スパンニングツリー) の数え上げによって道理付けられる. 全域木とは, 与えられたグラフの部分グラフであり, あるノードからすべてのノードに到達するループのないグラフ,

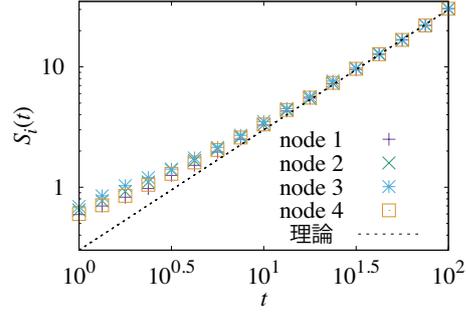


図 2 個々のノードと集団モードの拡散過程の比較.

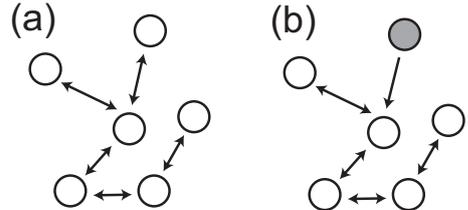


図 3 集団ゆらぎの下限と上限を与えるネットワークの例. (a) 民主主義的ネットワーク (無向グラフ). $\sigma = \sqrt{\frac{D}{N}}$. (b) 独裁的ネットワーク. $\sigma = \sqrt{D}$.

すわわち, 木 (ツリー) のことである. ノード 1, 2, 3, 4 から始まる全域木を数え上げると, それぞれ, 2, 4, 3, 1 個であることを確認して頂きたい. このようにノード i から始まる全域木の個数は V_i に比例することが, 行列木定理として知られている¹⁴⁾. なお, グラフ理論やネットワーク科学の文脈では L はネットワーク・ラプラシアン, あるいは単にラプラシアンと呼ばれ, ネットワークの構造やネットワーク上の動的過程の理解において中心的な役割を果たす.

4. ゆらぎのマイクロ・マクロリンク

マイクロな振動子が持つゆらぎは, マクロな振動にどのように反映されるだろうか? これを調べるため式 (16) の $\xi_i(t)$ として, 平均 0, 分散 D の白色ガウスノイズ ($\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = D \delta(t - t') \delta_{ij}$) を仮定する. この場合は, 線形化された方程式 (17) は多変数 Ornstein-Uhlenbeck 過程¹⁵⁾ の特殊ケースとなる. このとき, 集団モード成分の発展方程式 (19) は各 ξ_i が独立であることに注意すると,

$$\dot{y}_i = \sigma \xi_i(t) \quad (20)$$

に簡略化できる. ここで $\xi_i(t)$ は平均 0, 分散 1 の白色ガウスノイズで, σ は

$$\sigma = \sqrt{D \sum_{i=1}^N V_i^2} \quad (21)$$

によって与えられる。式 (20) から y_1 はブラウン運動を行うことがわかり、 σ はマクロなゆらぎの強度を決定する量である。以降、 σ を集団ノイズ強度と呼ぶ。

系の長時間挙動が式 (20) だけで記述できていることを数値シミュレーションで確認しておこう。式 (20) から集団モードの拡散過程は $\langle (y_1(t) - y_1(0))^2 \rangle$ によって特徴づけられ、一般的な確率過程の教科書にあるとおり、これは σt である。ここで $\langle \cdot \rangle$ はノイズに関するアンサンブル平均を表す。ノード i の拡散は

$$S_i(t) = \langle (x_i(t) - x_i(0))^2 \rangle \quad (22)$$

によって特徴づけられる。図 2 は式 (17) のシミュレーションによって $S_i(t)$ を計測した結果であり、ネットワークとして図 1(b) を採用している。理論曲線は $S_i = \sigma t$ であるが、 $D = 1$ としたので、 $\sigma^2 = \frac{2^2+4^2+3^2+1^2}{10^2} = \frac{3}{10}$ である。この図から、短時間では各 $x_i(t)$ は一般にはノードごとに異なる統計性を持つが、長時間の極限 $t \rightarrow \infty$ ではすべてのノードの $S_i(t)$ が集団モードのものに漸近的に一致することが見て取れる。なお、一般の t の場合のノード依存性については文献¹⁶⁾ に導出されており、 L が対称行列の場合はすべての固有値と右固有ベクトルが関わる次式で表される。

$$\frac{S_i(t)}{Dt} = \frac{1}{N} + \sum_{\ell=2}^N \frac{1 - e^{-\lambda^{(\ell)} t}}{\lambda^{(\ell)} t} \{u_i^{(\ell)}\}^2. \quad (23)$$

ここで $u_i^{(\ell)}$ は $\mathbf{u}^{(\ell)}$ の第 i 成分である。 t が十分大きいと右辺第 2 項が無視でき、長時間挙動である $S_i(t) = \sigma t$ の結果が得られる。非対称行列の場合には右辺第 1 項が $\frac{\sigma^2}{D}$ となり、第 2 項は左固有ベクトルにも依存する表式となるが、長時間の極限で第 1 項以外は無視できることは対称行列の場合と同様である¹⁶⁾。

5. 集団ノイズ強度のネットワーク構造依存性

集団ノイズ強度 σ の基本的性質を明らかにしておく。まず、規格化条件 $\sum_i V_i = 1$ から、 σ には下限 $\sigma = \sqrt{\frac{D}{N}}$ が存在し、これはすべてのノードで $V_i = \frac{1}{N}$ となるときに得られることが未定乗数法を用いると示せる。これは L が対称行列のとき、すなわち A を隣接行列とするグラフが無向グラフのときに得られる (図 3(a))。また、 A のすべての要素が非負であること

を仮定すると、Perron-Frobenius の定理から $V_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq N$) であることが保証される¹²⁾。この仮定のもとでは、 σ には上限 $\sigma = \sqrt{D}$ が存在し、この上限は特定のノードが重要度 1 を持ち、他の重要度がすべて 0 のときに得られる。この状況を実現するネットワークの例を図 3(b) に示した。このネットワークではある特定のノード (灰色) が他のノードからの影響を一切受けていない。このとき、灰色のノードの重要度が 1 で他はすべて 0 であり、 $\sigma = \sqrt{D}$ となる。(a) では各ノードのうけるゆらぎを全体で民主主義的に平均化し、その結果ゆらぎの強度は、各ノードの持つゆらぎの大きさの $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 倍に低減する。一方、(b) では、白のノード群だけであればノイズの民主主義的な平均化が行われるのだが、灰色のノードからの一方向的な作用のため、集団のゆらぎの大きさは灰色が単体で持つゆらぎの大きさと同じになる。

ゆらぎのシステムサイズ依存性という側面では、図 3(a) ではゆらぎが中心極限定理的に減衰するのに対して、(b) では集団の効果があったくない。(a) と (b) のネットワーク構造は極端な例だが、スケールフリー・ネットワークを考えると、中間的な状況が現れる。各ノードから出ている枝の本数を出次数というが、その分布がベキ分布 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ にしたがう有向スケールフリー・ネットワークを考えると、 $-2 \leq \gamma < 3$ の範囲では

$$\sigma \propto N^{-\beta}, \quad \beta = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} \quad (24)$$

というノイズの N 依存性が近似的に得られる。また、 $\gamma > 3$ では $\sigma \propto N^{-1/2}$ を得ることができる。 γ が小さいほど次数分布に大きな偏りがあり、そのようなネットワークでは一部の大きな出次数をもつノードが重要度 V_i を専有するため、ノイズの N 依存性が $N^{-1/2}$ より弱くなる。図 4 は様々な γ と N に対して、 $\mathbf{v}^{(1)}$ を数値的に求めることによって算出した β であり、理論曲線と定性的に一致する結果が得られている。

6. 集団ノイズ強度の同期パターン依存性

最後に、集団ノイズ強度の異常なシステムサイズ依存性が現実にもみられると期待される状況を紹介しよう。振動性の化学反応系である Belousov-Zhabotinsky 反応など、空間に広がった振動子集団ではターゲットパターンと呼ばれる空間パターンがよく観察される。このパターンではターゲットの中心領域が他の領域よりも

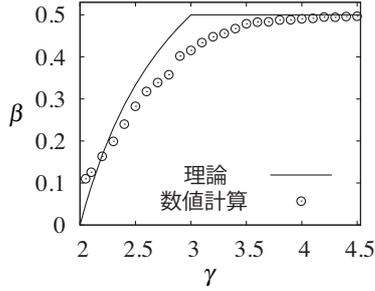


図4 スケールフリー・ネットワークにおけるゆらぎのシステムサイズ依存性の指数 β . 不均一性の強いネットワーク ($2 < \gamma < 3$) ではゆらぎの減衰が中心極限定理的振る舞いに比べて明らかに弱い.

固有振動数の高いペースメーカ領域となり, その領域がシステム全体を引き込むことによって現れる. 例えば動画¹⁷⁾を参照していただきたい. このような同期状態は, 式(1)において, 格子状のネットワークと式(2)の結合関数を仮定すると再現できる. ここでは $i = 1$ を左端, $i = N$ を右端とする一次元の格子を考え, ノード1の振動数を $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$, 他のノードの振動数を $\omega_i = \omega$ ($i = 2, \dots, N$) とする. ω の値は任意でよく, 例えば $\omega = 0$ ととって構わない. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ に設定すると, 十分大きな結合強度があれば, 振動数の大きい左端の振動子が全体を引き込み, 左端の振動子が先行したほぼ一定の位相勾配が形成される(図5(a)). 格子自体は隣接するノード間で対称な相互作用強度をもっているのだが, 位相ロック状態の安定性行列は2節で解説したのと同じ事情によって図1(a)が連鎖した図5(b)のような構造を持つ. 図中の値は $A_{i+1,i} : A_{i,i+1} = 1 : r$ という意味である. $\Delta\omega = 0$ のときは $r = 1$ だが, $\Delta\omega$ の増加とともに r は減少する. 図5(b)のネットワークについて各ノードの重要度は $0 \leq r < 1$ のとき

$$V_i = \frac{(1-r)(1-r^N)^{i-1}}{r} \quad (25)$$

と求めることができ, 重要度がペースメーカ領域 ($i = 1$) から指数関数的に減少していくことがわかる. また, 集団ノイズ強度は式(25)を式(21)に代入すると

$$\sigma = \sqrt{\frac{1-r+1+r^N}{1+r-1-r^N}} \quad (26)$$

であることがわかる. ただし $D = 1$ と置いた. この σ を N の関数としてプロットしたのが図5(c)である. $r = 1$ のときは A は対称行列となるので $\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}$ であるが, $0 < r < 1$ では σ は定数 $\sqrt{(1-r)/(1+r)}$

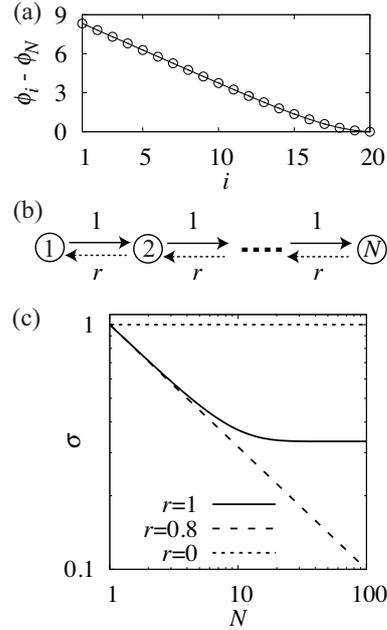


図5 ペースメーカによる引き込みと集団ノイズ強度. (a) 式(1)の生成する同期パターン. $\Delta\omega = 1, K = 2, \alpha = 0.4$. (b) 実効的なネットワーク構造. (c) (b)のネットワークに対する集団ノイズ強度 σ の N 依存性.

に $N \rightarrow \infty$ で漸近する様子が見られる. このように $0 < r < 1$ では, ある程度以上の N ではほとんどゆらぎの低減が起こらなくなる. これは, ペースメーカに近い上流側の振動子群だけが重要度 V_i を専有しているためである. さらに, $r = 0$ だと図3(b)と同様の構造となり, ゆらぎの低減がまったく起こらない. このような状況は振動性の化学反応系やあるいは細胞を使った実験で作れるだろう.

7. まとめと議論

リズムの世界におけるマイクロ・マクロリンクの定式化と, 集団の効果によるゆらぎの低減則についての研究を紹介した. 位相ロック, 弱ノイズ, 長時間挙動という仮定を置くことにより簡単に普遍的な取扱が可能となった. スケールフリー・ネットワークという接続性に大きな偏りが存在するネットワークや, 接続性に不均一性がなくても空間構造を持った同期状態が形成されると, ゆらぎのシステムサイズ依存性が, 中心極限定理的ふるまいに比べて弱くなることが示された.

物理学で取り扱う様々なマイクロ・マクロリンクの中

で、リズム現象のそれにはどのような特徴があるだろうか？ 一つは、散逸系に特有な秩序状態の安定性である。エネルギー保存系とは異なり、散逸系には漸近安定な秩序状態が存在することが一般的である。今回考えた系では位相ロック状態という秩序状態が安定で、その周りの摂動論が有効であった。

そしてもう一つは、振動状態に存在する時間並進対称性である。この並進性に対応するモードは無限に遅い自由度であるため時間スケールの分離ができ、長時間挙動はこのモードのみによって記述された。今回の理論は同様の対称性を持つ系であれば、振動現象以外にも適用できる。

本稿では位相ロック状態という集団全体が完全に振動数を一致させる秩序状態を扱ったが、部分的な同期状態に対しても同様の手法が適用できる場合がある¹⁸⁾。また、ミクロな振動子として仮定したのは弱いゆらぎをもつ振動子だが、タンパク質などといった分子スケールの現象を考えるために、マスター方程式で記述される振動現象を考えることも興味深い。まだまだ発展の余地のある研究題材だと考えている。

なお、本稿について佐々真一氏、増田直紀氏から貴重なコメントを頂いた。この場を借りてお礼申上げたい。

参考文献

- 1) H Kori. Synchronization of four metronomes on a suspension bridge. <https://www.youtube.be/ZMApCadGSt0>, 2011.
- 2) J R Clay and R L DeHaan. Fluctuations in inter-beat interval in rhythmic heart-cell clusters. role of membrane voltage noise. *Biophysical Journal*, Vol. 28, No. 3, pp. 377–389, Dec 1979.
- 3) K Kojima, T Kaneko, and K Yasuda. Role of the community effect of cardiomyocyte in the entrainment and reestablishment of stable beating rhythms. *Biochemical and Biophysical Research Communications*, Vol. 351, No. 1, pp. 209–215, Dec 2006.
- 4) E D Herzog, S J Aton, R Numano, Y Sakaki, and H Tei. Temporal precision in the mammalian circadian system: a reliable clock from less reliable neurons. *Journal of biological rhythms*, Vol. 19, No. 1, pp. 35–46, 2004.
- 5) J T Enright. Temporal precision in circadian systems: a reliable neuronal clock from unreliable components? *Science*, Vol. 209, pp. 1542–1545, 1980.
- 6) A T Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 2nd edition, 2001.

- 7) H Kori, Y Kawamura, H Nakao, K Arai, and Y Kuramoto. Collective-phase description of coupled oscillators with general network structure. *Physical Review E*, Vol. 80, p. 036207, Jan 2009.
- 8) N Masuda, Y Kawamura, and H Kori. Collective fluctuations in networks of noisy components. *New Journal of Physics*, Vol. 12, p. 093007, 2010.
- 9) H Kori, Y Kawamura, and N Masuda. Structure of cell networks critically determines oscillation regularity. *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 297, pp. 61–72, 2012.
- 10) 歳本由紀, 河村洋史. 同期現象の科学: 位相記述によるアプローチ. 京都大学学術出版会, 2017.
- 11) 郡宏, 森田善久. 生物リズムと力学系. 共立出版, 2011.
- 12) 伊理正夫. 一般線形代数. 岩波書店, 2003.
- 13) G B Ermentrout. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 52, No. 6, p. 1665, 1992.
- 14) N Masuda, Y Kawamura, and H Kori. Analysis of relative influence of nodes in directed networks. *Physical Review E*, Vol. 80, No. 4, p. 46114, 2009.
- 15) H Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 2nd edition, 1989.
- 16) H Kori, Y Kawamura, and N Masuda. Structure of cell networks critically determines oscillation regularity. *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 297, pp. 61–72, 2012.
- 17) H Kori. Target and spiral waves in belousov-zhabotinsky reaction. <https://youtu.be/PnOy1fSxBdI>, 2011.
- 18) Y Kawamura, H Nakao, K Arai, H Kori, and Y Kuramoto. Collective phase sensitivity. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 101, p. 024101, 2008.

(こおり・ひろし, お茶の水女子大学)